Ch 11

FONCTIONS LINÉAIRES et AFFINES

Sommaire

0- Objectifs

- *Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.*
- *Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.*
- *Représenter graphiquement une fonction linéaire.*
- *Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \rightarrow ax$.*
- *Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite.*

- *Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.*
- *Connaître et utiliser la relation $y = ax + b$ entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \rightarrow ax + b$.*
- *Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.*
- *Représenter graphiquement une fonction affine.*
- *Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.*
- *Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.*

1- Proportionnalité et fonction linéaire

Définition :

Une fonction f est une fonction linéaire de coefficient directeur a quand son expression algébrique est $f(x) = a \times x$. On a donc f: $x \mapsto a \times x$

Exemples

* Soit la fonction f : $x \mapsto 3x$. Quelle est la nature de f ?
Déterminer les images de 0, 2, 5, 7 et 10 par f.

f est la fonction linéaire de coefficient directeur 3.
On a $f(0)=3\times0=0$, $f(2)=3\times2=6$, $f(5)=3\times5=15$, $f(7)=3\times7=21$, $f(10)=3\times10=30$
On peut remarquer que $f(2+5) = f(2)+f(5)$ et $f(5\times2) = 5\times f(2)$
Cela est valable pour n'importe quels autres nombres puisque cela la résulte de la distributivité.
Ainsi, une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

* Soit la fonction g telle que $g(x) = -0,5x$. Quelle est la nature de g ?
Déterminer l'image de 3 par g et l'antécédent de 4 par g.

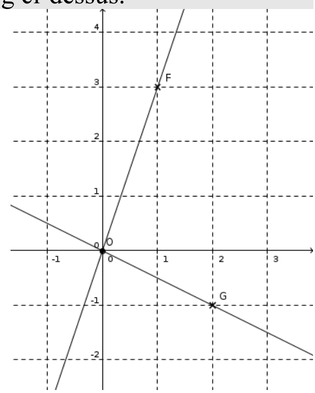
g est la fonction linéaire de coefficient directeur $-0,5$.
→ $g(3)=-0,5\times3=-1,5$ donc l'image de 3 par g est le nombre $-1,5$.
→ cherchons x tel que $g(x)=4$, c'est-à-dire tel que $-0,5x=4$ donc $x=4\div(-0,5)=-8$
L'antécédent du nombre 4 par g est le nombre -8.

Représentation graphique :

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exemples

* Représenter graphiquement les fonctions f et g ci-dessus.



Les deux fonctions linéaires f et g précédentes ont pour représentations graphiques des droites qui passent par l'origine O. Il suffit donc de calculer les coordonnées d'un autre point pour chaque droite : on calcule l'image d'un nombre par f et par g.

$f(1) = 3\times1 = 3$
Le point F(1;3) est sur la représentation de f.
On trace la droite (OF) qui est la représentation graphique de f.
$\frac{3}{1}$ = 3 est le coefficient directeur

$g(2) = -0,5\times2 = -1$
Le point G(2;−1) est sur la représentation de g.
On trace la droite (OG) qui est la représentation graphique de g.
$\frac{-1}{2}$ = −0,5 est le coefficient directeur

2- Fonction affine

Définition :

a et *b* étant deux nombres, une fonction f dont l'expression algébrique est f(x) = $ax+b$ s'appelle une fonction affine. On a donc f: $x \mapsto ax+b$.
a est le coefficient directeur et *b* est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

* Soit la fonction f: $x \mapsto 2x -3$. Quelle est la nature de f ? Quelles sont les images de −1, 0, 1 et 2 par f ? Quel est l'antécédent du nombre 5 par f ?
→ f est la fonction affine de coefficient directeur 2 et d'ordonnée à l'origine −3.
→ On a : f(−1) = −5, f(0) = −3, f(1) = −1, f(2) = 1
en effet, f(−1) = 2×(−1) −3 = −2 −3 = −5, (calculs à faire pour les autres valeurs)
→ On cherche x tel que g(x)=5 donc tel que $2x -3 = 5$ d'où $2x = 5 +3$
donc $2x = 8$ donc $x = 8\div2 = 4$ donc 4 est l'antécédent de 5 par la fonction affine f.

* Soit la fonction g: $x \mapsto -x +2$. Quelle est la nature de g ? Quelles sont les images de −1, 0, 1 et 2 par g ?
→ g est une fonction affine de coefficient directeur −1 et d'ordonnée à l'origine 2.
→ On a : g(−1) = 3, g(0) = 2, g(1) = 1, g(2) = 0
en effet, g(−1) = −(−1) +2 = 1 +2 = 3 (calculs à faire pour les autres valeurs)

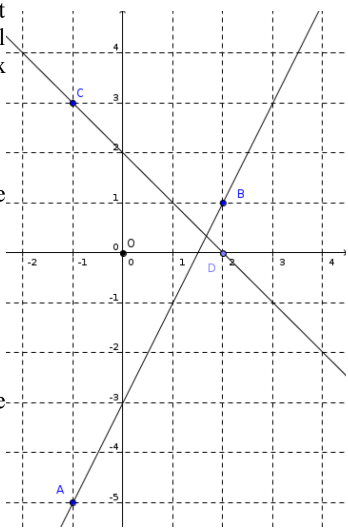
Représentation graphique :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Exemples :

* Représenter graphiquement les fonctions f et g ci-dessus.

Les deux fonctions affines f et g précédentes ont pour représentations graphiques des droites. Il suffit donc de calculer les coordonnées de deux points pour tracer chaque droite.



f(−1) = −5 donne un point A(−1;−5)
f(2) = 1 donne un point B(2;1)
La droite (AB) est la représentation graphique de f
$\frac{6}{3}$ = 2 est le coefficient directeur
−3 est l'ordonnée à l'origine

g(−1) = 3 donne un point C(−1;3)
g(2) = 0 donne un point D(2;0)
La droite (CD) est la représentation graphique de g
$\frac{-3}{3}$ = −1 est le coefficient directeur
2 est l'ordonnée à l'origine

3- Exemples de calculs

Exemple 1 : on connaît l'image d'un nombre par une fonction linéaire

* Déterminer la fonction linéaire f telle que f(2) = 7

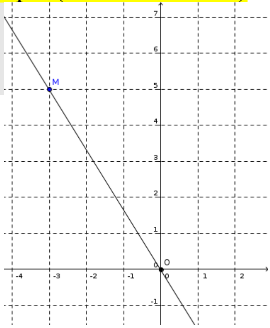
f est une fonction linéaire donc son expression algébrique est f(x) = ax où a est le coefficient de cette fonction linéaire.

On a donc f(2) = a×2 et on sait que f(2) = 7, d'où 2a = 7 donc $a = \frac{7}{2} = 3,5$

f est donc la fonction linéaire de coefficient 3,5.

Exemple 2 : on connaît un point de la représentation graphique (fonction linéaire)

* Déterminer la fonction linéaire g dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées M(−3;5).



g est une fonction linéaire donc son expression algébrique est g(x) = ax où a est le coefficient directeur.

graphiquement : $a = \frac{-5}{3}$

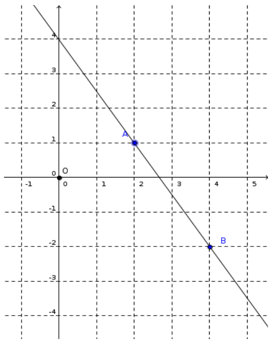
On vérifie par le calcul que g(−3) = 5

en effet, g(−3) = $\frac{-5}{3} \times (-3) = 5$

g est donc la fonction linéaire de coefficient directeur $-\frac{5}{3}$

Exemple 3 : on connaît deux points de la représentation graphique (fonction affine)

* Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique passe par les points A(2;1) et B(4;−2).



La fonction h est affine donc son expression algébrique est h(x) = $ax+b$ où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

graphiquement, l'ordonnée à l'origine est 4 donc b = 4.

graphiquement, $a = \frac{-3}{2} = -1,5$

On vérifie par le calcul que h(2) = 1 et h(4) = −2.
En effet :
h(2) = −1,5×2+4 = −3+4 = 1
h(4) = −1,5×4+4 = −6+4 = −2

h est donc la fonction affine telle que h(x) = −1,5x+4