Ch 14

SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Sommaire

0- Objectifs

- *Mettre en équation un problème.*
- *Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*

1- Équations avec deux inconnues

Exemple :

$2x+5y = 3$ est une égalité qui comporte 2 variables x et y.

* avec $x = 1$ et $y = 2$, $2x+5y = 2\times1+5\times2 = 2+10 = 12$
donc le couple (1;2) n'est pas une solution de l'équation $2x+5y = 3$

* avec $x = -1$ et $y = 1$, $2x+5y = 2\times(-1)+5\times1 = -2+5 = 3$
donc le couple (−1;1) est une solution de l'équation $2x+5y = 3$

* $x = 9$ et $y = -3$, $2x+5y = 2\times9+5\times(-3) = 18-15 = 3$
donc le couple (9;−3) est une solution de l'équation $2x+5y = 3$

Remarque :

on peut exprimer y en fonction de x : $5y = 3-2x$ donc $y = \frac{3}{5} - \frac{2x}{5}$

ainsi, pour chaque valeur de x, on aura une valeur de y telle que le couple obtenu soit une solution de l'équation $2x+5y = 3$

Système de 2 équations

un système de 2 équations est constitué de deux égalités qui doivent être vérifiées simultanément.

Exemple :

Soit le système $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=3 \end{cases}$

* avec $x = 1$ et $y = 2$,
$2x+y = 2\times1+2 = 2+2 = 4$
donc le couple (1;2) n'est pas une solution du système

* avec $x = 1$ et $y = 4$,
$2x+y = 2\times1+4 = 2+4 = 6$ et $x+2y = 1+2\times4 = 1+8 = 9$
donc le couple (1;4) n'est pas une solution du système

* avec $x = 3$ et $y = 0$,
$2x+y = 2\times3+0 = 6$ et $x+2y = 3+2\times0 = 3+0 = 3$
donc le couple (3;0) est une solution du système

2- Méthodes de résolution d'un système

Exemple 1 : méthode par substitution

le principe de cette méthode est d'exprimer une des variables en fonction de l'autre avec une des équations et de la remplacer par cette expression dans l'autre équation pour n'obtenir plus qu'une seule variable.

* Résoudre le système $\begin{cases} 4x+y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x+y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$$

méthode par substitution :

À partir de la 1ère égalité, on obtient $y = 3-4x$

et en remplaçant y par $3-4x$ dans la 2ème égalité, on a $2x + 3(3-4x) = 4$

ce qui donne $2x + 9 - 12x = 4$

$9 - 10x = 4$

$-10x = 4 - 9$

$-10x = -5$

$x = \dfrac{-5}{-10} = \dfrac{1}{2}$

on remplace alors x par $\dfrac{1}{2}$ pour obtenir la valeur de y :

$y = 3-4\times \dfrac{1}{2} = 3-2 = 1$

vérifions :

$\mathbf{4x+y} = 4\times \dfrac{1}{2} +1 = 2+1 = 3$

$\mathbf{2x+3y} = 2\times \dfrac{1}{2} +3\times 1 = 1+3 = 4$

Le couple ($\dfrac{1}{2}$;1) est la solution du système.

Exemple 2 : méthode par combinaison

Le principe de cette méthode est de multiplier chaque équation par un nombre de telle sorte à faire apparaître deux blocs opposés concernant une des variables : il suffira alors d'ajouter les deux équations pour n'obtenir plus qu'une seule variable.

Résoudre le système $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$

méthode par combinaison :

multiplions la 1ère égalité par 5 et la 2ème égalité par 3 : $\begin{cases} 10x-15y=40 \\ 6x+15y=3 \end{cases}$

Ajoutons les 2 égalités : $10x - 15y + 6x + 15y = 40 + 3$

Ce qui donne : $16x = 43$

donc $x = \dfrac{43}{16} = 2{,}6875$ car $16\times2{,}6875=43$

multiplions la 1ère égalité par -1 et la 2ème égalité par 1 (ce qui revient à la garder telle quelle) : $\begin{cases} -2x+3y=-8 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$

Ajoutons les 2 égalités : $-2x+3y+2x+5y = -8+1$

Ce qui donne : $8y = -7$

donc $y = \dfrac{-7}{8} = -0{,}875$ car $8\times(-0{,}875)=-7$

vérifions :

$\mathbf{2x-3y} = 2\times2{,}6875-3\times(-0{,}875) = 5{,}375+2{,}625 = 8$

$\mathbf{2x+5y} = 2\times2{,}6875+5\times(-0{,}875) = 5{,}375-4{,}375 = 1$

Le couple ($\dfrac{43}{16}$; $\dfrac{-7}{8}$) est la solution du système.

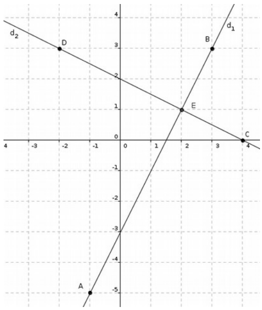
3- Interprétation graphique

Exemple 1 :

* Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases}$

La première équation peut s'écrire sous la forme $y = 2x-3$
et la deuxième sous la forme $y = -0{,}5x+2$.
Soit f_1 la fonction $x \mapsto 2x-3$ et f_2 la fonction $x \mapsto -0{,}5x+2$
f_1 et f_2 étant deux fonctions affines, leurs représentations graphiques sont deux droites d_1 et d_2.

Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites est la solution du système d'équation.



La droite d_1 passe par les points A(3;3) et B(−1;−5).
en effet, $f_1(3)=2\times3-3=6-3=3$
et $f_1(-1)=2\times(-1)-3=-2-3=-5$

La droite d_2 passe par les points C(4;0) et D(−2;3).
en effet, $f_2(4)=-0{,}5\times4+2=-2+2=0$
et $f_1(-2)=-0{,}5\times(-2)+2=1+2=3$

Lecture graphique des coordonnées du point d'intersection : E(2;1)

Vérification : $\boldsymbol{-2x+y}=-2\times2+1=-4+1=-3$ et et $\boldsymbol{x+2y}=2+2\times1=2+2=4$
Le couple (2;1) est donc la solution du système d'équation.

Exemple 2 :

* f est une fonction affine telle que $f(2) = 3$ et $f(-1) = -3$
Préciser l'expression algébrique de f.

f est une fonction affine donc elle est de la forme $f(x) = ax+b$
$f(2) = 3$ donc $2a+b=3$
$f(-1) = -3$ donc $-a+b=-3$
on a donc le système $\begin{cases} 2a+b=3 \\ -a+b=-3 \end{cases}$
méthode par substitution :
À partir de la 2ème égalité, $b = -3 + a$
on remplace b par $-3 + a$ dans la 1ère égalité : $2a + (-3 + a) = 3$
$2a - 3 + a = 3$ d'où $3a - 3 = 3$ donc $3a = 3 + 3$ donc $3a = 6$ donc $a = 6 \div 3 = 2$
et en remplaçant a par 2, on a $b = -3 + 2 = -1$
on vérifie : $f(2) = 2\times2-1 = 4-1 = 3$ et $f(-1) = 2\times(-1)-1 = -2-1 = -3$
la fonction f est donc telle que $f(x) = 2x-1$

4- Utilisation de la calculatrice

Exemple :

* Résoudre $\begin{cases} 5x+2y = 11 \\ 4x+3y = 13{,}6 \end{cases}$

1) on se place en mode de résolution des systèmes d'équations :
mode → 3 (EQN)
2) on choisit la forme adaptée → 1 ($a_nX+b_nY=c_n$)
3) on rentre les coefficients : 5, 2, 11, 4, 3 et 13,6
4) on appuie deux fois sur la touche EXE :

EXE → X = $\frac{29}{35}$

EXE → Y = $\frac{24}{7}$

pour revoir et changer éventuellement les coefficients de la matrice, on appuie sur la touche EXE

Le système a pour solution $x = \frac{29}{35}$ et $y = \frac{24}{7}$