Chapitre 3 : Les nombres rationnels

I. Rappels

Définition : un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire pour la forme $\frac{a}{b}$ ou $-\frac{a}{b}$ où a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul.

Remarques :

- on ne peut pas avoir 0 comme dénominateur : c'est interdit (erreur calculatrice)
- diviser par 1 ne change rien

Nature des nombres :

1) Activité :

En maternelle, on a appris à compter des objets, et on utilisait les nombres 1 , 2 , 3 ....ces nombres sont les premiers qui sont utilisés « naturellement » , on les nomme les nombres entiers naturels. Depuis à l'école primaire et au collège, on a découvert d'autres nombres. Voici une liste de nombres :

$$-27{,}2 \;;\; \frac{10371}{100} \;;\; \frac{27}{13} \;;\; \frac{3}{2} \;;\; \frac{-21}{15} \;;\; \pi \;;\; -\frac{10}{5} \;;\; \frac{47}{21} \;;\; -15 \;;\; -\frac{10}{3} \;;\; 37$$

Dans cette liste :

a) entoure en bleu les nombres entiers

b) entoure en rouge les nombres entiers relatifs (certains nombres peuvent être entourés plusieurs fois)

c) entoure en vert les nombres décimaux

Quels nombres reste-t-il ? $\frac{27}{13}$, $\frac{47}{21}$, $-\frac{10}{3}$ et π .

Les premiers sont des nombres en écriture fractionnaire appelés **nombres rationnels.**

37 est-il un nombre rationnel ? Oui car 37 peut s'écrire sous la forme d'une fraction $37=\frac{37}{1}$.

Pourquoi un nombre décimal est-il aussi un rationnel ? On a ici l'exemple : − 27,2 est aussi un rationnel car − 27,2 = $\frac{-272}{10}$

Il reste alors π que l'on classe dans la catégorie des **nombres irrationnels**.

Les **nombres entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.

Les **nombres entiers relatifs** sont les nombres entiers positifs et négatifs.

Un **nombre décimal** est le quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de 10 et c'est aussi un nombre dont la partie décimal s'écrit avec un nombre fini de chiffres non nuls

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui n'est pas rationnel.

II. Egalité de quotients

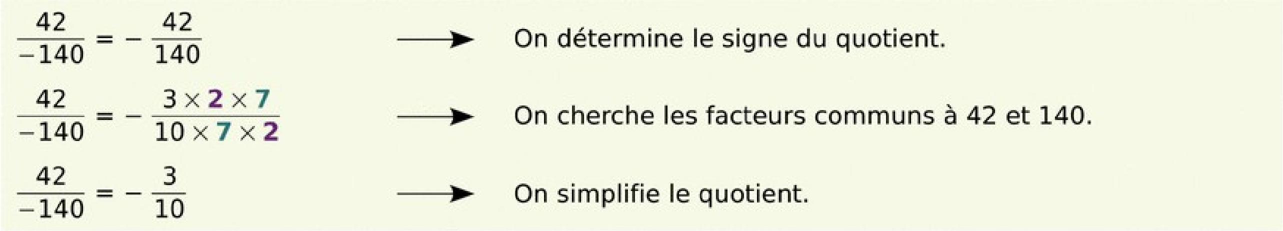
a) Simplification de quotient

Propriété(admise): si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Exemple 1 : Si on multiplie le numérateur **et** le dénominateur de $\frac{1}{2}$ par 2, on a :

$$\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2}=\frac{2}{4}$$

Exemple 2: Simplifie le quotient $\frac{42}{-140}$

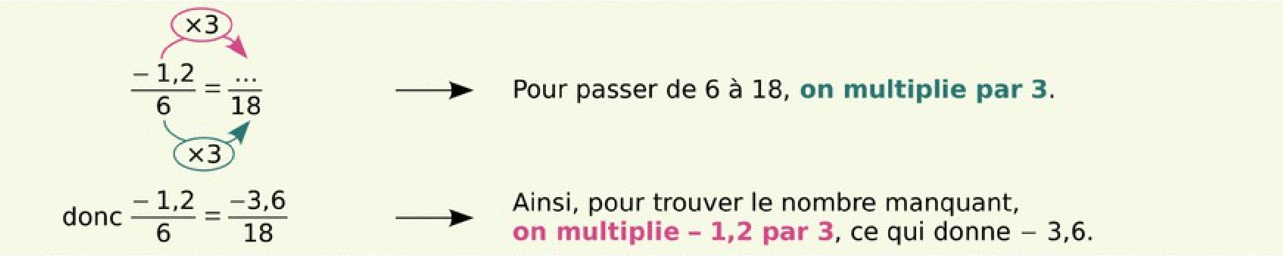


$\frac{42}{-140} = -\frac{42}{140}$ → On détermine le signe du quotient.

$\frac{42}{-140} = -\frac{3\times\mathbf{2}\times\mathbf{7}}{10\times\mathbf{7}\times\mathbf{2}}$ → On cherche les facteurs communs à 42 et 140.

$\frac{42}{-140} = -\frac{3}{10}$ → On simplifie le quotient.

Exemple 3 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6}=\frac{...}{18}$

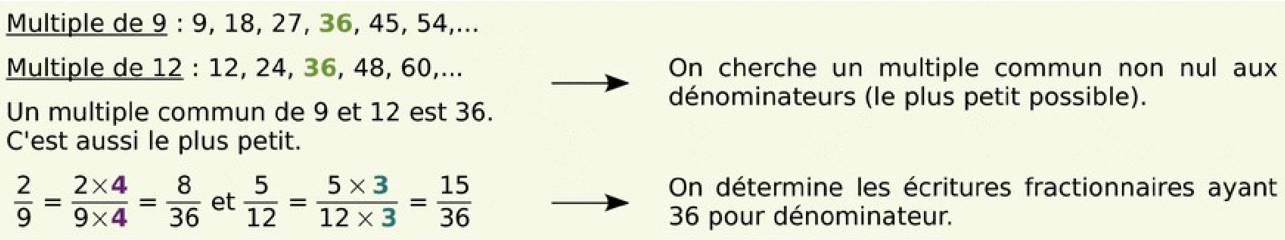


$\frac{-1,2}{6} = \frac{...}{18}$ → Pour passer de 6 à 18, **on multiplie par 3**.

donc $\frac{-1,2}{6} = \frac{-3,6}{18}$ → Ainsi, pour trouver le nombre manquant, **on multiplie – 1,2 par 3**, ce qui donne – 3,6.

b) Réduction de quotients au même dénominateur

Exemple 1 : Réduis $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur.



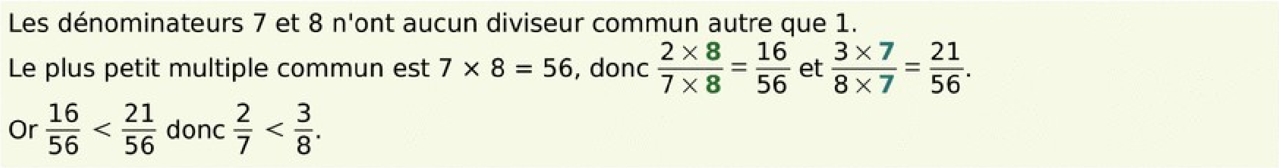
Multiple de 9 : 9, 18, 27, **36**, 45, 54,...

Multiple de 12 : 12, 24, **36**, 48, 60,... → On cherche un multiple commun non nul aux dénominateurs (le plus petit possible).

Un multiple commun de 9 et 12 est 36. C'est aussi le plus petit.

$\frac{2}{9} = \frac{2\times\mathbf{4}}{9\times\mathbf{4}} = \frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5\times\mathbf{3}}{12\times\mathbf{3}} = \frac{15}{36}$ → On détermine les écritures fractionnaires ayant 36 pour dénominateur.

Exemple 2 : Compare les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.



Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Le plus petit multiple commun est 7 × 8 = 56, donc $\frac{2 \times \mathbf{8}}{7 \times \mathbf{8}} = \frac{16}{56}$ et $\frac{3 \times \mathbf{7}}{8 \times \mathbf{7}} = \frac{21}{56}$.

Or $\frac{16}{56} < \frac{21}{56}$ donc $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$.

Exercices : 3 page 15 / 10 et 14 page 16 / 19 page 17

c) Produit en croix

Propriétés (admises) :

– **Si** deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux **alors** leurs produits en croix sont égaux – Réciproque : **si** les produits en croix de deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux **alors** ces deux nombres égaux.	Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

Remarque : En particulier, pour démontrer que deux nombres en écriture fractionnaire ne sont pas égaux, il suffit de démontrer que leurs produits en croix ne sont pas égaux.

Exemple 1 : Les nombres $\frac{2,1}{3,5}$ et $\frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

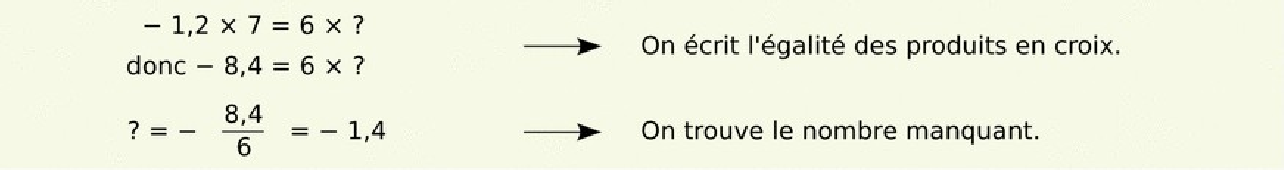
2,1 × 6,9 = 14,49 et 3,5 × 4,1 = 14,35 ⟶ On calcule les produits en croix.

14,49 ≠ 14,35 ⟶ On les compare.

donc $\frac{2,1}{3,5} \neq \frac{4,1}{6,9}$ ⟶ Les **produits en croix ne sont pas égaux** donc **les nombres ne sont pas égaux**.

Exercice : 3 page 14

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{...}{7}$



− 1,2 × 7 = 6 × ?

donc − 8,4 = 6 × ? ⟶ On écrit l'égalité des produits en croix.

? = − $\frac{8,4}{6}$ = − 1,4 ⟶ On trouve le nombre manquant.

Exercice : 5 page 14

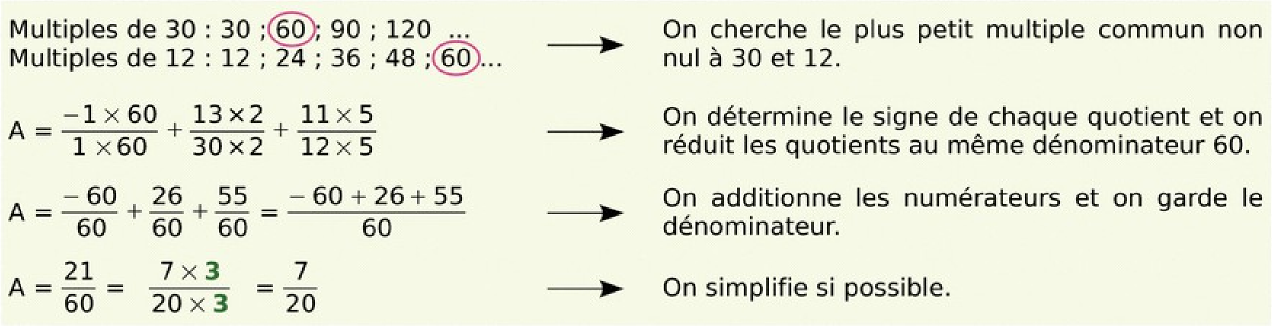
III. Addition ou soustraction

Propriété (admise):

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.	Pour tous nombres *a, b* et *c* où *b* est **non nul** : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Remarque : Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemple : Calcule l'expression $A=-1+\frac{13}{30}-\frac{-11}{12}$



Multiples de 30 : 30 ; $\textcircled{60}$; 90 ; 120 ...
Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; $\textcircled{60}$ ... → On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.

$A=\frac{-1\times 60}{1\times 60}+\frac{13\times 2}{30\times 2}+\frac{11\times 5}{12\times 5}$ → On détermine le signe de chaque quotient et on réduit les quotients au même dénominateur 60.

$A=\frac{-60}{60}+\frac{26}{60}+\frac{55}{60}=\frac{-60+26+55}{60}$ → On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$A=\frac{21}{60}=\frac{7\times \mathbf{3}}{20\times \mathbf{3}}=\frac{7}{20}$ → On simplifie si possible.

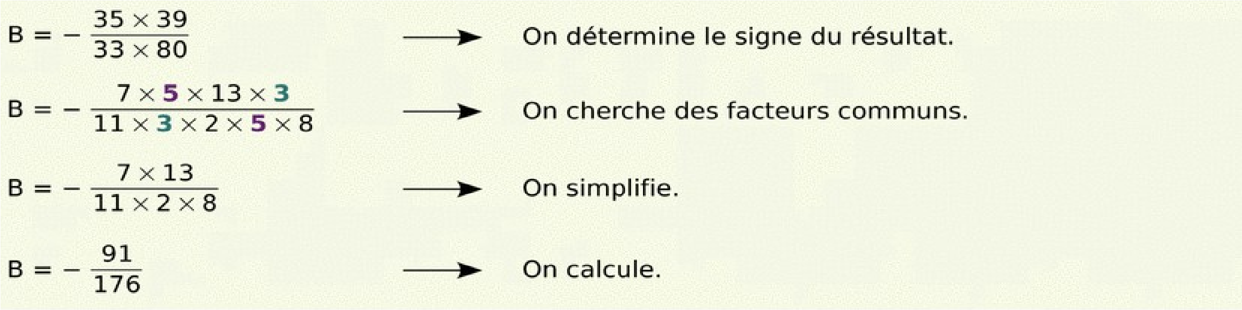
Exercices : 5 page 19, 8 page 21 et 10 page 22

IV. Multiplication

Propriété (admise) :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.	Pour tous nombres *a, b* et *c* et *d* où *b* et *d* sont non nuls : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Exemple : Calcule l'expression $B=-\frac{35}{33}\times\frac{-39}{-80}$. Donne le résultat sous forme simplifiée.



$B=-\frac{35\times 39}{33\times 80}$ → On détermine le signe du résultat.

$B=-\frac{7\times\mathbf{5}\times 13\times\mathbf{3}}{11\times\mathbf{3}\times 2\times\mathbf{5}\times 8}$ → On cherche des facteurs communs.

$B=-\frac{7\times 13}{11\times 2\times 8}$ → On simplifie.

$B=-\frac{91}{176}$ → On calcule.

Exercices : 1 page 23, 4 page 23 et 7 page 24

V. Division de deux quotients

A) Inverse d'un nombre non nul

Définition : Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur **produit est égal à 1**.

Exemples :

- $1\times1=1$ donc l'inverse 1 est lui-même
- $-1\times(-1)=1$ donc l'inverse de – 1 est lui-même

Propriétés (admises) :

- Tout nombre x non nul **admet un inverse** (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

- Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a\neq0$ et $b\neq0$) **admet un inverse** qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Exemples : Quels sont les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$?

L'inverse de 3 est $3^{-1}=\frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$.

Remarques :

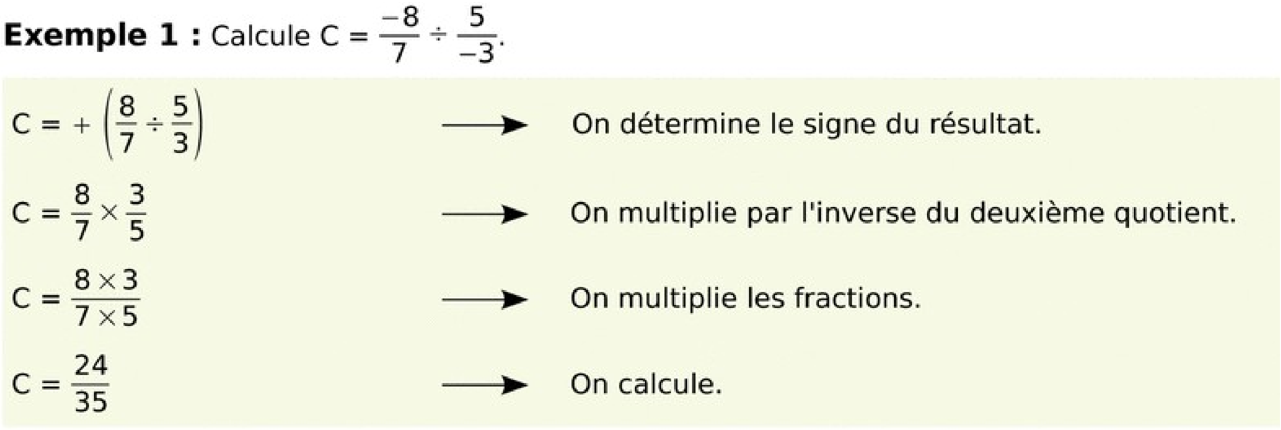
- Un nombre et son inverse ont **toujours le même signe**.
En effet, leur produit qui vaut 1 est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.

- **Zéro** est le seul nombre qui **n'admet pas d'inverse**.
En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1.

B) Diviser des quotients

Propriété (admise) :

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.	Pour tous nombres *a, b* et *c* et *d* où *b, c* et *d* sont non nuls : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ ou $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$



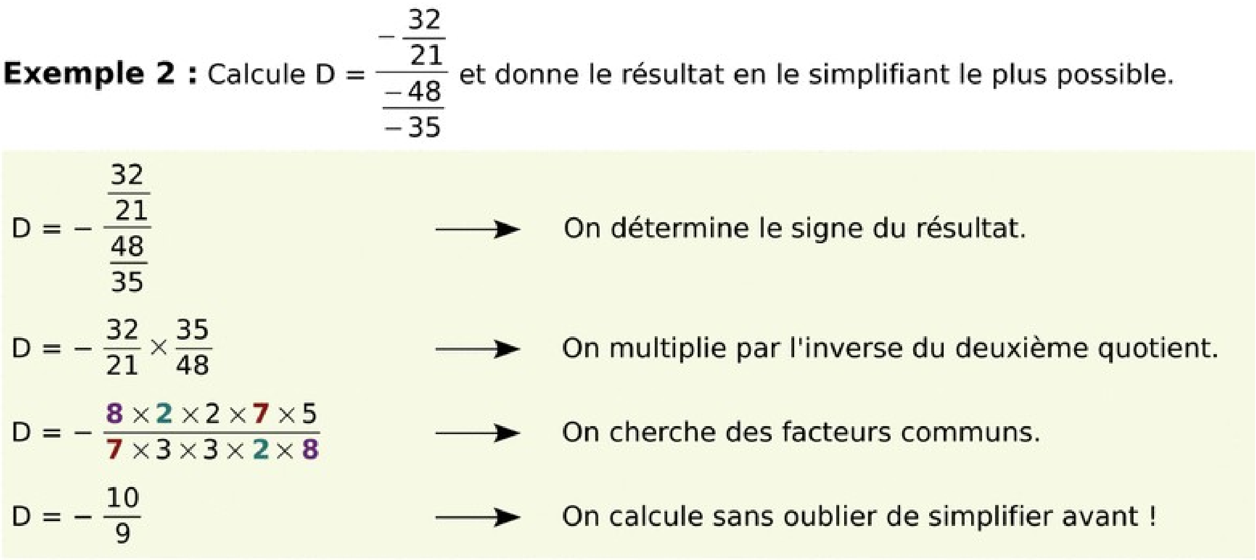
Exemple 1 : Calcule $C = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$.

$C = +\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$ ⟶ On détermine le signe du résultat.

$C = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$C = \frac{8 \times 3}{7 \times 5}$ ⟶ On multiplie les fractions.

$C = \frac{24}{35}$ ⟶ On calcule.



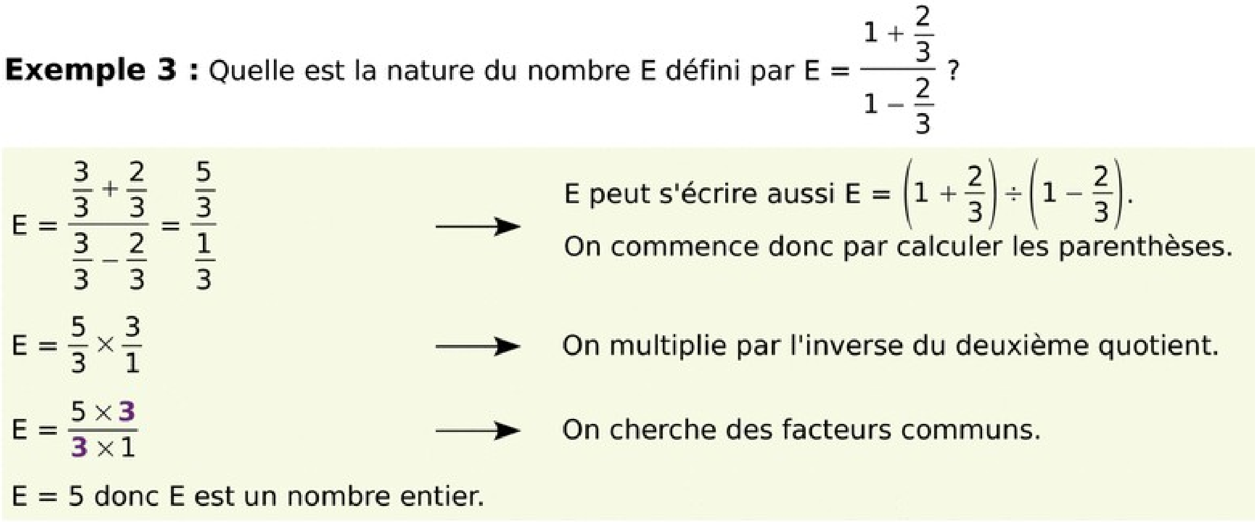
Exemple 2 : Calcule $D = \dfrac{-\frac{32}{21}}{\frac{-48}{-35}}$ et donne le résultat en le simplifiant le plus possible.

$D = -\dfrac{\frac{32}{21}}{\frac{48}{35}}$ ⟶ On détermine le signe du résultat.

$D = -\frac{32}{21} \times \frac{35}{48}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$D = -\frac{8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 8}$ ⟶ On cherche des facteurs communs.

$D = -\frac{10}{9}$ ⟶ On calcule sans oublier de simplifier avant !



Exemple 3 : Quelle est la nature du nombre E défini par $E = \dfrac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$?

$E = \dfrac{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}$ ⟶ E peut s'écrire aussi $E = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \div \left(1 - \frac{2}{3}\right)$. On commence donc par calculer les parenthèses.

$E = \frac{5}{3} \times \frac{3}{1}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$E = \frac{5 \times 3}{3 \times 1}$ ⟶ On cherche des facteurs communs.

E = 5 donc E est un nombre entier.

Exercices : fiche sésamath 3ème