

Calcul littéral et équations

Travail de groupe - corrigé

Le triangle égyptien est le triangle rectangle qui a pour mesure des côtés 3, 4 et 5. On veut prouver la propriété suivante : "Il n'existe qu'un seul triangle rectangle dont les mesures des côtés sont des entiers consécutifs".

1. En appelant n la mesure du plus petit côté, montre que le problème peut se modéliser avec l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$.
2. Développe l'expression $(n + 1)(n - 3)$ et déduis-en la solution au problème du triangle égyptien.

Solution :

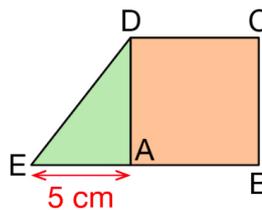
1. Comme les longueurs des côtés doivent être des entiers successifs, on les note n , $n + 1$ et $n + 2$.
Le triangle sera rectangle si $(n + 2)^2 = (n + 1)^2 + n^2 \iff n^2 + 4n + 4 = n^2 + 2n + 1 + n^2 \iff n^2 + 4n + 4 = 2n^2 + 2n + 1 \iff 0 = n^2 - 2n - 3$.
2. $(n + 1)(n - 3) = n^2 - 3n + n - 3 = n^2 - 2n - 3$.
Les solutions de l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$ sont celles de l'équation $(n + 1)(n - 3) = 0$, à savoir -1 et 3.
Ainsi, le triangle est rectangle si $n = 3$.

Le seul triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des entiers consécutifs est le triangle égyptien.

91 Relier la géométrie et le numérique

Modéliser • Raisonner • Communiquer

Quelle doit être la longueur du côté du carré ABCD pour que ce carré et le triangle rectangle AED aient la même aire ?



Solution :

On note x la longueur du côté du carré ABCD.

Aire du carré ABCD = x^2 .

Aire du triangle AED = $5 \times x \div 2$.

Ainsi,

$$x^2 = 5 \times x \div 2 \iff 2x^2 = 5x \iff 2x^2 - 5x = 0 \iff x(2x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2,5.$$

Le carré doit avoir un côté de 2,5 cm.

95 Comprendre une situation

Chercher • Raisonner • Communiquer

Trouver tous les nombres tels que le carré de la somme de ce nombre et de 5 est égal à 25.

Solution :

On note x le nombre cherché.

On doit avoir

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 = 25 &\iff (x + 5)^2 - 25 = 0 \iff (x + 5 - 5)(x + 5 + 5) = 0 \\ &\iff x(x + 10) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -10\end{aligned}$$

Les deux nombres cherchés sont 0 et -10.