| Chapitre 12 : | Fonction linéaire et fonction affine. |
|---|---|

## I- Définitions.

### 1) Fonction affine.

***a* et *b* désignent deux nombres relatifs donnés.**

**Une fonction affine est une fonction qui, à un nombre $x$, associe le nombre $ax + b$.**

**Si $f$ désigne cette fonction, on la note $f : x \longmapsto ax + b$.**

**On dit que $ax + b$ est l'image de $x$ et on note $f(x) = ax + b$.**

### 2) Cas particuliers.

- Pour b = 0, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto ax + 0$, donc $x \longmapsto ax$.
  Une fonction affine pour laquelle $b = 0$ est une **fonction linéaire.**
- Pour $a = 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto 0 \times x + 2$, donc $x \longmapsto b$.
  Par cette fonction, tous les nombres ont la même image.
  On dit que cette fonction est une **fonction constante.**

### 3) Exemples.

***Exemple 1 :***

Préciser, si chacune des fonctions suivantes est affine, linéaire ou constante :

$f_1 : x \mapsto 7x - 1$ $f_1$ est de la forme $f_1(x) = ax + b$ avec $a = 7$ et $b = -1$ donc $f_1$ est une fonction affine.

$f_2 : x \mapsto -8x$ $f_2$ est de la forme $f_2(x) = ax + b$ avec $a = -8$ et $b = 0$ donc $f_2$ est une fonction affine.
$f_2$ est aussi une fonction linéaire car b = 0.

$f_3 : x \mapsto -15$ $f_3$ est de la forme $f_3(x) = ax + b$ avec $a = 0$ et $b = -15$ donc $f_3$ est une fonction affine.
$f_3$ est aussi une fonction constante car $a = 0$.

***Exemple 2 :***

La fonction $f$ qui, à tout nombre $x$, associe son double augmenté de 5 se note : $f : x \mapsto 2x + 5$

$f$ est une fonction affine car elle est de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 5$.

On a $f(-3) = 2\times(-3) + 5 = -6 + 5 = -1$ L'image du nombre – 3 par la fonction f est -1.

Un antécédent du nombre -1 par la fonction f est le nombre – 3.

***Exemple 3 :***

Soit g la fonction linéaire qui à $x$ associe $-2x$. On note : $g(x) = -2x$

| $x$ | -4 | -1 | 7 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 8 | 2 | -14 |

L'image de - 4 par la fonction g est 8.

### 4) Antécédent.

**Propriété (*Conjecture avec Geogebra*) :**

**Si f est une fonction affine non constante, alors tout nombre admet un antécédent par la fonction f et cet antécédent est unique.**

**Exemple 1 :**
Soit $h$ la fonction définie par $h(x) = 4x$.
Calculer l'antécédent du nombre 18 par la fonction $h$.

L'antécédent du nombre 18 par la fonction $h$ est la solution de l'équation :
$4x = 18$ $x = \frac{18}{4}$ $x = 4{,}5$ L'antécédent du nombre 18 par la fonction $h$ est 4,5.

**Exemple 2 :**
On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = -4x + 9$
Calculer l'antécédent du nombre – 11 par la fonction $f$.

L'antécédent du nombre -11 par la fonction $f$ est la solution de l'équation :
$-4x + 9 = -11$ $-4x = -11 - 9$ $-4x = -20$ $x = \frac{-20}{-4}$ $x = 5$
L'antécédent du nombre -11 par la fonction $h$ est 5.

**Exemple 3 :**
On considère la fonction g : $x \longmapsto -\frac{7}{3}x - 7$
Calculer l'antécédent du nombre $-\frac{9}{4}$ par la fonction g.

L'antécédent du nombre $-\frac{9}{4}$ par la fonction $g$ est la solution de l'équation :
$-\frac{7}{3}x - 7 = -\frac{9}{4}$ $-\frac{7}{3}x = -\frac{9}{4} + 7$ $-\frac{7}{3}x = -\frac{9}{4} + \frac{28}{4}$ $-\frac{7}{3}x = \frac{19}{4}$

$x = \frac{19}{4} : (-\frac{7}{3})$ $x = \frac{19}{4} \times (-\frac{3}{7})$ $x = -\frac{57}{28}$

L'antécédent du nombre $-\frac{9}{4}$ par la fonction $g$ est $-\frac{57}{28}$.

## II- Déterminer une fonction.

### 1) Fonction linéaire.

Pour déterminer une fonction linéaire, c'est-à-dire connaître la formule de calcul qui lui est associée, il suffit de connaître un nombre non nul et son image. On peut alors calculer le coefficient $a$.

**Exemple 1 :**
Déterminer la fonction linéaire f par laquelle l'image de 15 est 45.

On sait que l'image de 15 est 45 donc $f(15) = 45$.
$f$ est une fonction linéaire donc $f$ est de la forme $f(x) = ax$
$f(15) = a\times15$ on en déduit : $15a = 45$ d'où $a = \frac{45}{15} = 3$

Conclusion : $f : x \longmapsto 3x$

**Exemple 2 :**
On considère la fonction g telle que g(3) = - 15. Déterminer la fonction linéaire g.
$g$ est une fonction linéaire donc $g$ est de la forme $g(x) = ax$
$g(3) = a\times3$ on en déduit : $3a = -15$ d'où $a = -\frac{15}{3} = -5$

Conclusion : $g : x \longmapsto -5x$

## 2) Fonction affine : proportionnalité des accroissements.

**Propriété :**

***a* et *b* désignent des nombres relatifs ; f est la fonction affine tel que f(*x*) = *ax* + *b***

**Pour deux nombres distincts $x_1$ et $x_2$, on a :**

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \text{ ou encore } a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

**Remarques :**

- Pour une fonction affine f : $x \longmapsto ax + b$, les accroissements des valeurs de f($x$) sont proportionnels aux accroissements des valeurs de $x$.
- Cette propriété permet de calculer le nombre ***a*** connaissant deux nombres et leurs images.

**Exemple 1 :**

f est une fonction affine telle que f(3) = 6 et f(5) = 12.

Calculer *a*.

$$a = \frac{f(3) - f(5)}{3-5} = \frac{6-12}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

**Exemple 2 :**

g est une fonction affine.

Les points A(1 ; 8) et B(–3 ; 12) appartiennent à la représentation graphique de la fonction g.

Calculer *a*.

A(1 ; 8) signifie que l'image de 1 par la fonction g est 8 donc g(1) = 8.

B(–3 ; 12) signifie que l'image de -3 par la fonction g est 12 donc g(-3) = 12.

$$a = \frac{g(1) - g(-3)}{1-(-3)} = \frac{8-12}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

**Exemple 3 : Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.**

On considère les points A (-3 ; 2) et B (1 ; 4).

La droite (AB) est la représentation graphique d'une fonction affine f.

**1)** Déterminer f.

f est une fonction affine donc elle est de la forme f($x$) = $ax + b$

Il faut calculer a puis b.

**Calcul de *a* :**

A(-3 ; 2) signifie que l'image de -3 par la fonction f est 2 donc f(-3) = 2.

B(1 ; 4) signifie que l'image de 1 par la fonction f est 4 donc f(1) = 4.

$$a = \frac{f(-3) - f(1)}{-3-1} = \frac{2-4}{-4} = \frac{-2}{-4} = 0,5 \quad \text{donc } f(x) = 0,5x + b$$

**Calcul de b :**

On sait que f(1) = 4 d'où f(1) = 0,5×1 + b = 4 0,5 + b = 4 b = 4 – 0,5 = 3,5

**Conclusion :** f : $x \longmapsto 0,5x + 3,5$

**2)** Le point C(2 ; 4) appartient-il à la représentation graphique d'une fonction affine f ?

Calculons f(2) = 0,5×2 + 3,5 = 1 + 3,5 = 4,5

On constate que f(2) ≠ 4 donc le point C n'appartient pas à la représentation graphique de la fonction f.

**3)** Le point D(-100 ; -46,5) appartient-il à la représentation graphique d'une fonction affine f ?

Calculons f(-100) = 0,5×(-100) + 3,5 = -50 + 3,5 = -46,5

On constate que f(-100) = -46,5 donc le point D appartient à la représentation graphique de la fonction f.

**III. Représentation graphique d'une fonction affine.**

**1) Propriété et définitions. Activité : (PowerPoint)**

**Propriété :** **Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.**

**On dit que $y = ax + b$ est une équation de cette droite.**

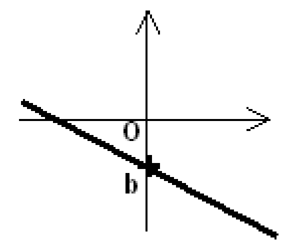
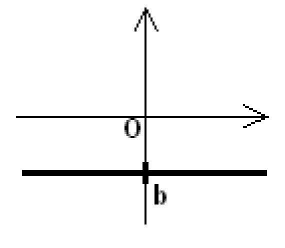
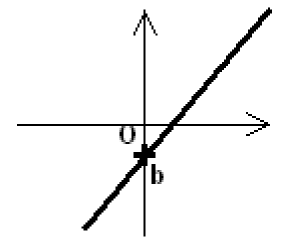
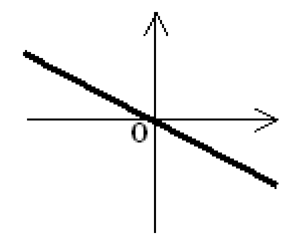
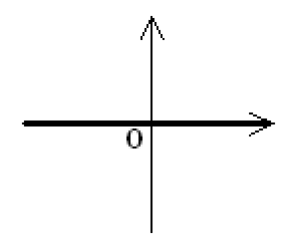
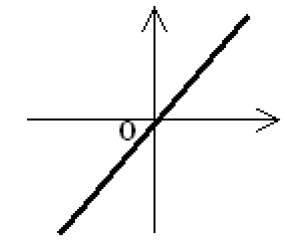
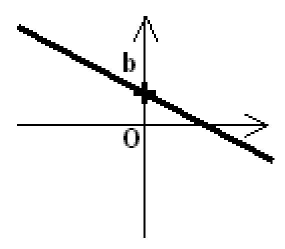
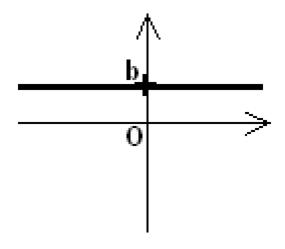
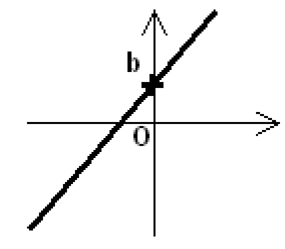
**Définitions :**

**Le nombre $a$ est appelé le coefficient directeur de cette droite.**

**Le nombre $b$ est appelé l'ordonné à l'origine de cette droite.**

**2) Interprétation graphique du coefficient directeur $a$ et de l'ordonnée à l'origine $b$.**

- Sur GeoGebra, tracer une droite (d).
- Afficher l'équation de cette droite.
- Déplacer cette droite, et précisez le signe des nombres *a et b.*

| **Position de la droite selon les valeurs de *a et b*** | **Si *a* est négatif alors la droite descend de la gauche vers la droite** | **Si *a* égal à zéro alors la droite est horizontale** | **Si *a* est positif alors la droite monte de la gauche vers la droite** |
|---|---|---|---|
| ***b < 0*** <br> **la droite passe en dessous de l'origine** |   |   |   |
| **b = 0** <br> **la droite passe par l'origine du repère** |   |   |   |
| **b > 0** <br> **la droite passe au dessus de l'origine** |   |   |   |

On peut être plus précis :

- plus le nombre $a$ est proche de 0, et plus la droite se rapproche de l'horizontale.
- plus le nombre $a$ est grand et plus la droite se rapproche de la verticale.

Dans un repère la représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = ax + b$

➢ $a$ est le coefficient directeur :

si $a > 0$, la fonction est croissante.

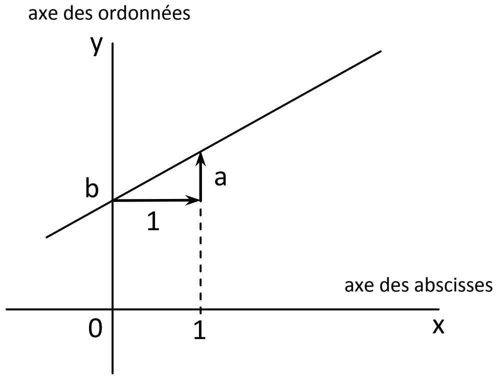
si $a < 0$, la fonction est décroissante.

si $a = 0$, la fonction est constante.

➢ $b$ est l'ordonnée à l'origine

(en effet, si $x = 0$, alors $y = a \times 0 + b = b$ ;

la droite coupe donc l'axe des ordonnées en $b$)

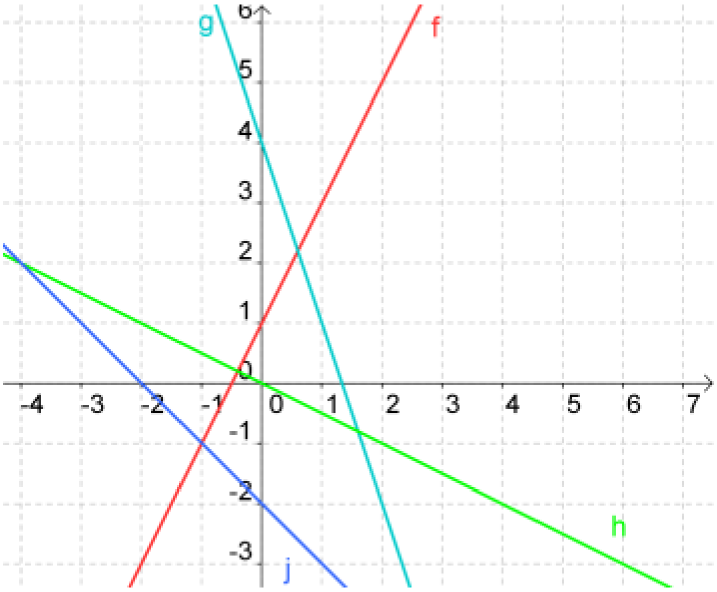



**Remarque :** **La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.**

**Application :**

Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les représentations graphiques des fonctions :

$f : x \longmapsto 2x + 1$ $\quad$ $g : x \longmapsto -3x + 4$ $\quad$ $h : x \longmapsto -\frac{1}{2}x$ $\quad$ $j : x \longmapsto -2 - x$




### 3) Déterminer graphiquement une fonction affine.

**Exemple 1 :**

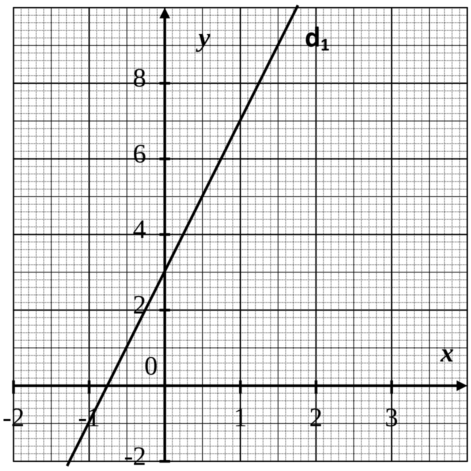
**1)** L'ordonnée à l'origine de la droite $d_1$ est : 3

**2)** Le coefficient directeur de la droite $d_1$ est : 4

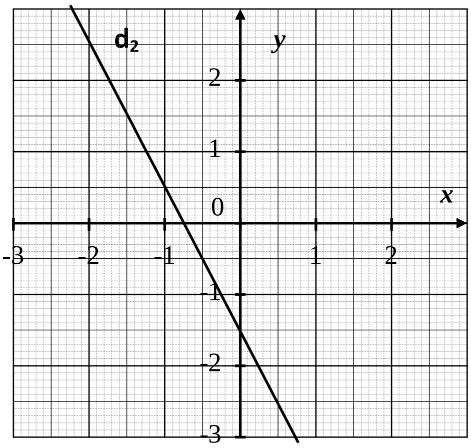
**3)** Compléter l'équation de la droite $d_1$ : $y = 4x + 3$

$d_1$ est la représentation graphique de la fonction $f_1$ tel que :

$f_1 : x \longmapsto 4x+3$



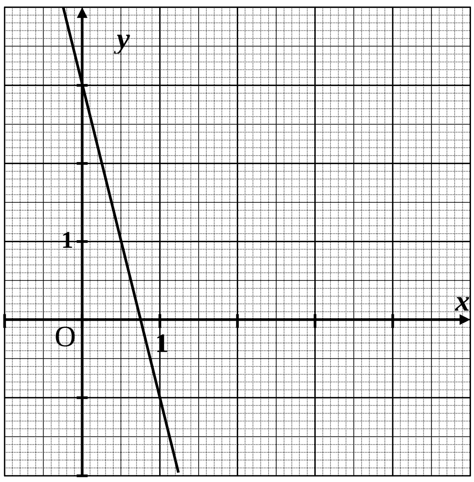

**Exemple 2 :**




Équation de la droite : $d_2$ : $y = -2x - 1{,}5$

$d_2$ est la représentation graphique de la fonction $f_2$ tel que : $f_1 : x \longmapsto -2x - 1{,}5$

**Exemple 3 :**




$f_3 : x \longmapsto -4x + 3$